



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

A

Génie Mécanique, 5ème Semestre

## EXAMEN FINAL – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2019-2020

DURÉE : 2H30MIN

### Instructions :

Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé

#### Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
  - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouge et vert sont réservés pour la correction.**
  - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
  - Une calculatrice est autorisée.

#### Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
  - Prenez soin de numéroter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

#### Contenu de l'examen

- Question 1 – 15 points
  - Page 1
- Question 2 – 15 points
  - Page 1
- Question 3 – 20 points
  - Page 2
- Question 4 – 15 points
  - Page 2
- Question 5 – 35 points
  - Page 3

**QUESTION 1**

**(15 points)**

Sur un oscillateur élémentaire, avec raideur  $k$ , masse  $m$  et coefficient d'amortissement  $c$ , on applique une force périodique, ayant la formule :

$$f(t) = F_0 \cos(\omega_0 t) (1 + 3 \cos(\omega_0 t))$$

- i) À quelles fréquences aura-t-on un mouvement ? ..... (4 pts)**
- ii) Calculer la valeur de l'amplitude de mouvement pour chaque fréquence..... (9 pts)**
- iii) À quelle fréquence trouve-t-on l'amplitude la plus large ?..... (2 pts)**

Formule d'aide :

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{\cos(A + B) + \cos(A - B)}{2}$$

Données pour le problème :

$$\frac{F_0}{k} = 1 \text{ m}; \quad \omega_0 = 1 \frac{\text{rd}}{\text{s}}; \quad \frac{c}{m} = 10^{-2} \frac{\text{rd}}{\text{s}}$$

**Solution**

(i)

On décompose la force selon ses harmoniques :

$$f(t) = F_0 \cos(\omega_0 t) (1 + 3 \cos(\omega_0 t)) = \frac{3}{2} F_0 + F_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{3}{2} F_0 \cos(2\omega_0 t)$$

On aura donc un mouvement en DC ( $\omega = 0$ ), à  $\omega_0$ , et à  $2\omega_0$ .

(ii)

L'amplitude est donnée par :

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\rightarrow X(\omega = 0) = \frac{3F_0}{2k} = 1.5 \text{ m} \\ \omega = \omega_0 &\rightarrow X(\omega = \omega_0) = \frac{F_0}{2k\eta} = \frac{F_0 2m\omega_0}{2kc} = \frac{F_0}{k} \omega_0 \frac{m}{c} = 100 \text{ m} \\ \omega = 2\omega_0 &\rightarrow X(\omega = 2\omega_0) = \frac{3F_0}{2k\sqrt{(1 - 2^2)^2 + (4\eta)^2}} \approx \frac{3F_0}{2k3} = \frac{1}{2} \frac{F_0}{k} = 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

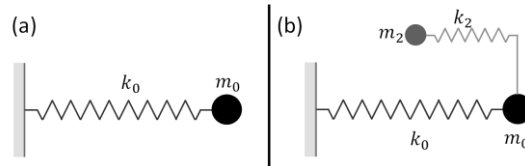
(iii)

L'amplitude la plus large se trouve à  $\omega_0$ .

**QUESTION 2** **(15 points)**

Le système de la Figure 2.1.a reçoit des vibrations externes à deux fréquences :  $\omega_{ext,1}^2 = \omega_0^2$  et  $\omega_{ext,2}^2 = 1.25\omega_0^2$ , où  $\omega_0$  est la pulsation propre du système original. On veut limiter l'amplitude de vibration du système avec un amortisseur de Frahm en version conservatrice (Figure 2.1.b) avec les conditions suivantes : l'amplitude générée à  $\omega_{ext,1}$  doit être nulle et l'amplitude de mouvement de  $m_0$  doit être 9 fois plus petite que dans le système original (Figure 2.1.a). Calculer :

- i) Le rapport entre les masses  $\frac{m_2}{m_1}$  ..... (10 pts)
- ii) Pour quelle fréquence on trouve une amplitude de la masse secondaire 100 fois plus large que l'amplitude de  $m_0$  dans l'amortisseur de Frahm..... (5 pts)



**Figure 2.1** | Schémas pour le système original (a) et l'amortisseur de Frahm (b)

**Solution**

(i)  
Le système est conservatif. Alors :

$$X_{1,Frahm} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\epsilon\beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2)} X_{1,s}$$

Pour annuler le mouvement à  $\omega_{ext,1}^2 = \omega_0^2$ , on doit avoir :  $\alpha = 1$ .

Après on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_{1,orig} &= \frac{1}{1 - \beta^2} X_{1,s} \\ X_{1,Frahm} &= \frac{\beta^2 - 1}{\epsilon\beta^2 - (\beta^2 - 1)^2} X_{1,s} \\ \frac{X_{1,Frahm}}{X_{1,orig}} &= \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\epsilon\beta^2 - (\beta^2 - 1)^2} = \frac{1}{\frac{\epsilon\beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} - 1} = \frac{1}{9} \rightarrow \epsilon = 10 \frac{(1 - \beta^2)^2}{\beta^2} \end{aligned}$$

Si on utilise maintenant la fréquence du problème :

$$\epsilon = \frac{m_2}{m_1} = 10 \frac{(1 - \beta^2)^2}{\beta^2} = 10 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{4} = 0.5$$

(ii)

$$\frac{X_{2,Frahm}}{X_{1,Frahm}} = \frac{1}{1 - \beta^2} = 100 \rightarrow \omega^2 = 1.01\omega_0^2 \rightarrow \omega \approx 1.005\omega_0$$

**QUESTION 3 (20 points)**

Le système *conservatif sans gravité* de la Figure 3.1 se compose de deux ressorts sans masse de constante  $k$ , ainsi que d'une barre de masse  $m$ , longueur  $L$  et rigidité infinie. On suppose que les angles de rotation  $\theta$  sont toujours petits ( $\theta \ll 1$ ). Les fréquences propres du système sont :  $\omega_I = \sqrt{2\frac{k}{m}}$ ;  $\omega_{II} = \sqrt{12\frac{k}{m}}$  et les vecteurs propres associés sont :  $\vec{v}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  dans les coordonnées  $\{x_1, x_2\}$ . On lâche le système depuis une situation  $x_1(t = 0) = x_0$ ;  $x_2(t = 0) = 0$ .

- i) Écrire l'évolution temporelle de l'amplitude du premier mode,  $q_1(t)$ ..... (5 pts)
- ii) Écrire l'évolution temporelle de l'amplitude du deuxième mode,  $q_2(t)$ ..... (5 pts)
- iii) Écrire l'évolution temporelle de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ ..... (10 pts)

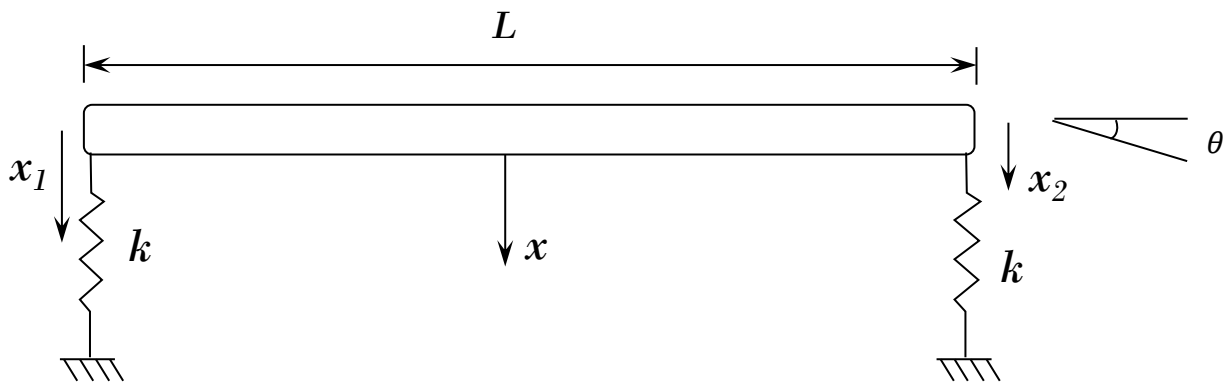


Figure 3.1 | Schéma du système, avec la barre de rigidité infinie de masse  $m$ , et les ressorts.

**Solution**

(i)  
On sait que les conditions initiales sont :

$$\vec{x}(t = 0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{x}}(t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on traduit ça dans la base des modes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}(t = 0) = B^{-1} \cdot \vec{x}(t = 0) = \frac{x_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{q}}(t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors on peut suivre que :

$$q_1(t) = \frac{x_0}{2} \cos(\sqrt{2}\omega_0 t), \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(ii)

$$q_2(t) = \frac{x_0}{2} \cos(\sqrt{12}\omega_0 t)$$

(iii)

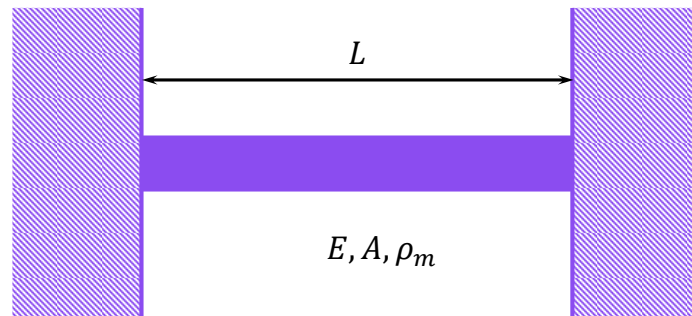
Pour revenir dans la base originale :

$$\vec{x}(t) = B \cdot \vec{q}(t) = \frac{x_0}{2} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \cos(\sqrt{12}\omega_0 t) \\ \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) - \cos(\sqrt{12}\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

**QUESTION 4** **(15 points)**

Le système de la Figure 4.1 est une barre de section  $A$ , longueur  $L$ , module de Young  $E$ , et densité volumique de masse  $\rho_m$ . On est intéressé par les vibrations longitudinales dans cette barre.

- i) Calculer les fréquences propres de la barre..... (10 pts)
- ii) Calculer les modes normaux de la barre ..... (5 pts)



**Figure 4.1** | Schéma du système, avec la barre où on étudie les vibrations longitudinales.

**Solution**

(i)  
Comme on parle de vibrations longitudinales on utilisera l'équation du 2<sup>ème</sup> ordre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On utilise la séparation de variables et la solution sera donc du type :

$$u(x, t) = (A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)) \cos(\omega_n t); \text{ avec } k_n = \omega_n \sqrt{\frac{\rho_m}{E}}$$

Les conditions de bord sont :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Alors simplement on trouve :

$$A_n = 0$$

$$\sin(k_n L) = 0 \rightarrow k_n L = n\pi \rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L} \rightarrow \omega_n = n \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho_m}}$$

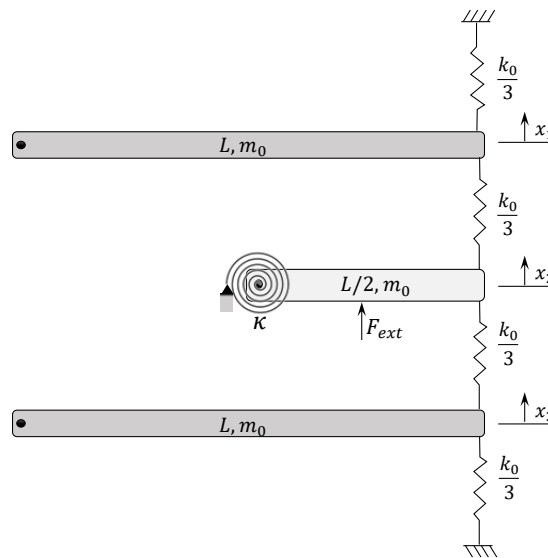
(ii)  
Les modes propres/normaux de la barre sont :

$$\phi_n(x, t) = \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho_m}} t\right)$$

**QUESTION 5 (35 points)**

Le système *sans gravité* de la Figure 5.1 se compose de 3 barres indéformables de masse  $m_0$  reliées avec de ressorts sans masse de raideur  $\frac{k_0}{3}$ . La barre au milieu présente un ressort en torsion avec raideur  $\kappa = \frac{k_0 L^2}{12}$  et elle supporte une force externe appliqué au milieu de la barre.

- i) Combien degrés de liberté on trouve dans le système ?..... (1 pt)
- ii) Écrire les équations du mouvement du système en fonction de  $x_1, x_2, x_3$  ..... (6 pts)
- iii) Écrire la matrice de rigidité et la matrice de masse du système..... (4 pts)
- iv) Déterminer les pulsations propres..... (6 pts)
- v) Déterminer les vecteurs propres..... (3 pts)
- vi) Est-ce que les pulsations et vecteurs propres dépendent de  $F_{ext}$  ? Pourquoi ?..... (3 pts)
- vii) Si  $F_{ext}(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$ , calculer la force effective sur chaque mode normal..... (6 pts)
- viii) Est-ce que la valeur de la force effective est définie de manière unique ?..... (3 pts)
- ix) Pour quelle(s) valeurs de  $\omega$  on trouvera une amplitude maximale ? ..... (3 pts)



**Figure 5.1** | Schéma du système, avec les barres de rigidité infinie et les ressorts.

**Solution**

(i) 3 DdL

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{m_0 L^2}{3} \ddot{x}_1 &= -2 \frac{k_0}{3} L x_1 + \frac{k_0}{3} L x_2 \\ \frac{m_0 L^2}{12} \ddot{x}_2 &= -2 \frac{k_0}{3} \frac{L}{2} x_2 - \kappa \frac{x_2}{L} + \frac{k_0 L}{3} x_1 + \frac{k_0 L}{3} x_3 + F_{ext} \frac{L}{4} \\ \frac{m_0 L^2}{3} \ddot{x}_3 &= \frac{k_0}{3} L x_2 - 2 \frac{k_0}{3} L x_3 \end{aligned}$$

On peut simplifier :

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{3} \ddot{x}_1 + 2 \frac{k_0}{3} x_1 - \frac{k_0}{3} x_2 &= 0 \\ \frac{m_0}{3} \ddot{x}_2 + k_0 x_2 - \frac{k_0}{3} x_1 - \frac{k_0}{3} x_3 &= \frac{F_{ext}}{2} \\ \frac{m_0}{3} \ddot{x}_3 - \frac{k_0}{3} x_2 + 2 \frac{k_0}{3} x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$K = \frac{k_0}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad M = \frac{m_0}{3} \mathbb{I}$$

(iv)

Pour les pulsations propres on doit estimer les valeurs propres de la matrice noyau :

$$A = M^{-1}K = \frac{k_0}{m_0} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On fait :

$$\det \left( \frac{k_0}{m_0} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \mathbb{I} \right) = 0 \rightarrow \det \left( \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda' \mathbb{I} \right) = 0; \text{ avec } \lambda = \frac{k_0}{m_0} \lambda'$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda' \mathbb{I} \right) = (2 - \lambda')^2 (3 - \lambda') - 2(2 - \lambda') = (2 - \lambda')(6 - 5\lambda' + \lambda'^2 - 2)$$

$$\lambda'_I = 1; \lambda'_{II} = 2; \lambda'_{III} = 4 \rightarrow \omega_I = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}; \omega_{II} = \sqrt{2 \frac{k_0}{m_0}}; \omega_{III} = 2 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}$$

(v)

Pour les vecteurs propres :

$$\omega_I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 - a = 1 \rightarrow a = 1 \\ -1 + 3a - b = a \rightarrow b = 1 \\ - \end{cases} \rightarrow \vec{v}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{II} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 - a = 2 \rightarrow a = 0 \\ -1 + 3a - b = 2a \rightarrow b = -1 \\ - \end{cases} \rightarrow \vec{v}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{III} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 - a = 4 \rightarrow a = -2 \\ -1 + 3a - b = 4a \rightarrow b = 1 \\ - \end{cases} \rightarrow \vec{v}_{III} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(vi)

Ni les fréquences ni les vecteurs propres ne dépendent de  $F_{ext}$  parce qu'ils sont propres au système, pas à la force que l'on applique. Si l'on avait un système non-forcé, on retrouverait les mêmes valeurs pour les fréquences et les vecteurs propres.

(vii)

Le vecteur de force en coordonnées originales est :

$$\vec{F}_{ext}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{2} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour transformer cela en basse modale, on doit le multiplier par la transposée de la matrice de changement de base :

$$\vec{F}_{ext \text{ sur les modes}}(t) = B^T \cdot \vec{F}_{ext}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{2} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{2} \cos(\omega t) \\ 0 \\ -F_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

---

(viii)

Comme pour calculer la  $\vec{F}_{ext \text{ sur les modes}}(t)$  on a utilisé la matrice de changement de base, qui est constituée par les vecteurs propres, la valeur de cette force effective dépend de la normalisation des modes propres.

---

(ix)

L'amplitude maximale sera trouvée aux fréquences propres du système,  $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$ . Dans le cas conservatif, la réponse du système part vers l'infini lorsque l'on s'approche de ces fréquences-là.